Výpočet času periodických dejov a jeho chyby pomocou postupnej metódy

Vychýlime fyzikálne kyvadlo z rovnovážnej polohy a necháme ho kmitať. Budeme merať doby 10 kmitov celkom 10 krát formou medzičasov. Pod kmitom sa rozumie pohyb kyvadla napr. z jednej krajnej polohy do pôvodnej krajnej polohy. Meranie začneme od nuly a namerané medzičasy po 10 kmitoch: *i10T* zapisujeme do tabuľky (MPM).

						10^{-5}	10^{-10}
i	i 10T [s]	i + 5	(i+5)10T [s]	$\Delta T_i = T_{i+5} - T_i$	$\Delta T_i / 50$	$\Delta_i = \overline{T} - \Delta T_i / 50$	$(\Delta_i)^2$ $[s^2]$
1	0,00	6	42,30	42,30	0,8460	-400,0000	160000
2	8,30	7	50,60	42,30	0,8460	-400,0000	160000
3	16,50	8	58,60	42,10	0,8420	0,0000	0
4	24,90	9	67,20	42,30	0,8460	-400,0000	160000
5	33,70	10	75,20	41,50	0,8300	1200,0000	1440000
	I.		II.	$\sum_{i=1}^{5} \Delta T_i =$ 210,5		$\sum_{i=1}^{5} \Delta_i =$ 0,0000	$\sum_{i=1}^{5} (\Delta_i)^2 =$ 1920000

Vykonané časové merania rozdelíme do dvoch skupín: **I.** (1. – 5. medzičas) a **II** (6. – 10. medzičas). Urobíme rozdiely medzi hodnotami jednotlivých skupín, tj. medzi 6. medzičasom z II. skupiny a 1. medzičasom z I. skupiny, atď., tak ako je v tabuľke. Takto dostaneme 5 časových rozdielov, ktoré odpovedajú 50 kmitom kyvadla. Potom napíšeme vzorce, do ktorých budeme dosadzovať vypočítané hodnoty z tabuľky a nakoniec uvedieme výsledok. Vzor výpočtu:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta T_i}{n \times 50} = \frac{210{,}5}{250} = 0{,}8420\,s \qquad \overline{\delta}_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (\Delta_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1920000 \times 10^{-10}}{5 \times 4}} = 0{,}003098 \doteq 0{,}003\,s$$

Pre menej ako 100 meraní zaokrúhľujeme chybu na prvú platnú číslicu (prvú nenulovú zľava).
Na taký istý počet miest (ako chybu) zaokrúhľujeme aj aritmetický priemer. V tomto prípade počet meraní je n = 5.

Výsledný vzťah potom napíšeme (nezabudnúť uviesť jednotky a podčiarknuť):

$$\underline{T = \overline{T} \pm \overline{\delta}_T = (0{,}842 \pm 0{,}003)\,s}$$

Vyhodnocovanie chýb merania

A) Výpočet priemeru valčeka d a jeho chyby

Do tabuľky (VCHM_d) napíšeme namerané hodnoty d_i. Potom napíšeme vzorce, do ktorých budeme dosadzovať vypočítané hodnoty z tabuľky a nakoniec uvedieme výsledok. Vzor výpočtu:

		10^{-4}	10^{-8}
i	d_i	$\Delta_i = \bar{d} - d_i$	$(\Delta_i)^2$
1	22,360	-15	225
2	22,350	85	7225
3	22,360	-15	225
4	22,370	-115	13225
5	22,355	35	1225
6	22,360	-15	225
7	22,355	35	1225
8	22,360	-15	225
9	22,365	-65	4225
10	22,350	85	7225

$\sum_{i=1}^{10} d_i =$ 223,585 $\qquad \sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2 =$ 35250

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = \frac{223{,}585}{10} = 22{,}3585 \quad mm$$

$$\bar{\delta}_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{35250 \times 10^{-8}}{10.9}}$$

$$= 19{,}79057 \times 10^{-4} \doteq 0{,}002 \quad mm$$

Pre menej ako 100 meraní zaokrúhľujeme chybu na prvú platnú číslicu (prvú nenulovú zľava). Na taký istý počet miest (ako chybu) zaokrúhľujeme aj aritmetický priemer.

Výsledný vzťah potom napíšeme (nezabudnúť uviesť jednotky a podčiarknuť):

$$\underline{d = \bar{d} \pm \bar{\delta}_d = (22{,}359 \pm 0{,}002)\, mm = (22{,}359 \pm 0{,}001) \times 10^{-3} m}$$

B) Výpočet výšky valčeka h a jeho chyby

Do tabuľky (VCHM_h) napíšeme namerané hodnoty h_i a ďalej postupujeme pre druhý rozmer valčeka: výšku h a jej chybu ako v predošlom prípade.

		10^{-4}	10^{-8}
i	h_i	$\Delta_i = \bar{h} - h_i$	$(\Delta_i)^2$
1	15,010	-135	18225
2	15,015	-185	34225
3	14,970	265	70225
4	14,990	65	4225
5	14,980	165	27225
6	14,995	15	225
7	14,990	65	4225
8	15,010	-135	18225
9	15,005	-85	7225
10	15,000	-35	1225

$\sum_{i=1}^{10} h_i =$ 149,965 $\qquad \sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2 =$ 185250

$$\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \Delta_i}{10} = \frac{149{,}965}{10} = 14{,}9965\, mm$$

$$\bar{\delta}_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{185250 \times 10^{-8}}{10.9}}$$

$$= 45{,}36886 \times 10^{-4} \doteq 0{,}005\, mm$$

$$\underline{h = \bar{h} \pm \bar{\delta}_h = (14{,}997 \pm 0{,}005)\, mm = (14{,}997 \pm 0{,}005).10^{-3}\, m}$$

C) Výpočet objemu valčeka V a jeho chyby

Pri výpočte objemu valčeka a chyby objemu valčeka postupujeme nasledovným spôsobom. Do vzorcov dosádzame už vypočítané priemerné hodnoty priemeru $\overline{d}$ a výšky $\overline{h}$ valčeka a ich určených chýb $\overline{\delta}_d$, $\overline{\delta}_h$.

Pre výpočet chyby nepriamych meraní použijeme nasledovný všeobecný vzťah:

$$\delta_X = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\delta_a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\delta_b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 (\delta_c)^2 + \ldots}$$

Výpočet objemu valčeka: $\overline{V} = \pi.\overline{r}^2.\overline{h} = \pi.\left(\frac{\overline{d}}{2}\right)^2.\overline{h} = \frac{\pi}{4}\left(\overline{d}\right)^2.\overline{h}$

Výpočet chyby nepriameho merania objemu valčeka:

$$\overline{\delta}_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \overline{\delta}_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \overline{\delta}_d^2}$$

kde $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial\left(\frac{\pi}{4}.d^2.h\right)}{\partial h} = \frac{\pi}{4}.d^2 = \frac{V}{h}$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\partial\left(\frac{\pi}{4}d^2.h\right)}{\partial d} = \frac{\pi}{4}.h.2.d = \frac{2.V}{d}$

$$\overline{\delta}_V = \sqrt{\left(\frac{V}{\overline{h}}\right)^2 \overline{\delta}_h^2 + \left(\frac{2.V}{\overline{d}}\right)^2 \overline{\delta}_d^2} = \sqrt{V^2\left(\frac{1}{\overline{h}}\right)^2 \overline{\delta}_h^2 + V^2\left(\frac{2}{\overline{d}}\right)^2 \overline{\delta}_d^2} = V\sqrt{\left(\frac{1}{\overline{h}}\right)^2 \overline{\delta}_h^2 + \left(\frac{2}{\overline{d}}\right)^2 \overline{\delta}_d^2}$$

$$\overline{V} = \pi.\overline{r}^2.\overline{h} = \pi.\left(\frac{\overline{d}}{2}\right)^2.\overline{h} = \frac{\pi}{4}\left(\overline{d}\right)^2.\overline{h} = \frac{3{,}14}{4}(22{,}359\,mm)^2.14{,}997\,mm = 5885{,}4381\,mm^3$$

$$\overline{\delta}_V = \overline{V}\sqrt{\left(\frac{1}{\overline{h}}\right)^2 \overline{\delta}_h^2 + \left(\frac{2}{\overline{d}}\right)^2 \overline{\delta}_d^2} = \overline{V}\sqrt{\left(\frac{1}{14{,}997}\right)^2 (0{,}002)^2 + \left(\frac{2}{22{,}359}\right)^2 (0{,}005)^2} =$$

$$\overline{\delta}_V = 5885{,}4381\,mm^{-3}.\sqrt{(1{,}778489 + 20{,}003005)\times 10^{-8}}$$
$$= 5885{,}4381\,mm^{-3}.4{,}667\times 10^{-4} = 2{,}7467\,mm^{-3} \doteq 3\,mm^{-3}$$

$$\underline{V = \overline{V} \pm \delta_V = (5885 \pm 3)\,mm^{-3} = (5885 \pm 3)\times 10^{-9}\,m^{-3}}$$

V niektorých prípadoch *percentuálna odchýlka* nám dáva lepší pohľad na presnosť nášho výpočtu. Počítame ju podľa nasledovného vzťahu: $\delta_{\%} = \frac{\delta_V}{\overline{V}}100\% = \frac{3}{5885}100\% = 0{,}05\ \%$