MERANIE POISSONOVEJ KONŠTANTY

RNDr. Jaroslav Kovár

Teoretický úvod:

Plyn za rovnováhy je úplne určený potrebným počtom tzv. stavových veličín, tlakom p, objemom V a teplotou T. Nakoľko pri zohrievaní plynu značne sa mení jeho tlak i objem, bude od týchto veličín závislá aj tepelná kapacita a merné teplo. Preto u plynu poznáme dve tepelné kapacity a teda i dve hmotnostné teplá, podľa toho, akým spôsobom zohrievanie plynu robíme. Ak zohrievame plyn za stáleho objemu, plyn nekoná žiadnu prácu a celé dodané množstvo tepla sa mení na vnútornú energiu. Ak zasa zohrievame plyn za stáleho tlaku, potom dodané teplo sa mení jednak na vnútornú energiu plynu a tiež aj na prácu, ktorú plyn koná voči vonkajším silám. Dodané množstvo tepla je v tomto prípade pri dosiahnutí rovnakej hodnoty vnútornej energie väčšie, ako v predošlom prípade. Z uvedeného vyplýva, že tepelná kapacita plynu za stáleho tlaku C_p je väčšia ako tepelná kapacita za stáleho objemu C_V. Vnútorná energia sústavy za rovnováhy je vo všeobecnosti funkciou teploty T a objemu V, t. j. $U(T,V)$. Z prvej vety termodynamickej pre vratné deje a sústavy nachádzajúce sa v rovnovážnom stave platí pre množstvo tepla prijaté sústavou

$$dQ = dU(T,V) + p\,dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p\,dV =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \,.$$

Tepelnú kapacitu definujeme ako podiel množstva tepla prijatého sústavou k zmene teploty pri danom deji

$$C = \frac{dQ}{dT} \,.$$

Ak prebieha zohrievanie sústavy za konštantného objemu dostaneme tepelnú kapacitu za konštantného objemu C_V

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \,.$$

Ak prebieha zohriavanie pri konštantnom tlaku, potom dostaneme tepelnú kapacitu za konštantného tlaku

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\text{t. j.} \qquad C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \,.$$

Pre ideálny plyn je stavová rovnica daná vzťahom $pV = RT$ (R – plynová konštanta) a platí preň Jouleov zákon: energia nezávisí od objemu t. j. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. Pretože platí $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$, potom pre takýto plyn dostaneme

$$C_p = C_V + R \,.$$

Túto rovnicu nazývame aj Mayerov vzťah.

Podiel tepelných kapacít $C_p / C_V = \chi$ nazývame Poissonovou konštantou. Prírastok vnútornej energie plynu o N molekulách možno vyjadriť na základe kinetickej teórie plynov vzťahom $dU = \frac{i}{2} Nk\,dT$, kde k je Boltzmanova konštanta, i je počet stupňov voľnosti danej molekuly (najmenší počet parametrov, pomocou ktorých je možné pohyb molekuly vyjadriť). Pre jeden mól plynu $(N = N_A)$ je

$$dU = \frac{i}{2} N_A k dT = \frac{i}{2} R dT$$

kde súčin $kN_A = R$ nazývame plynovou konštantou a z definície pre C_V dostávame

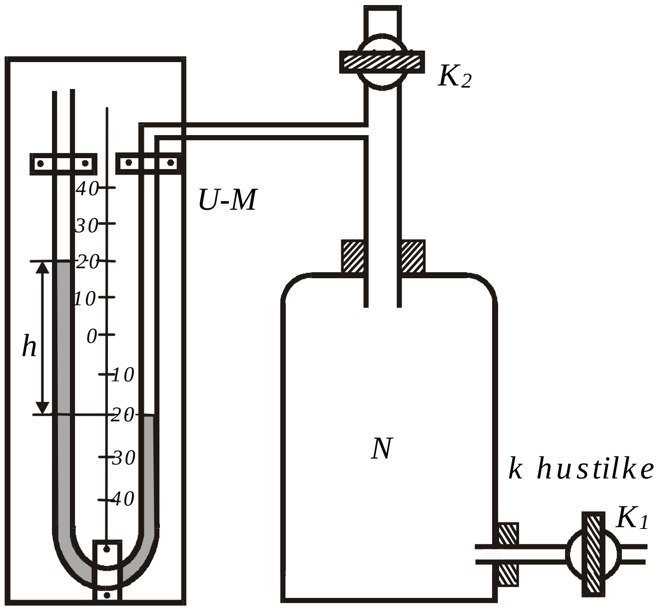
$$C_V = \frac{i}{2} R \ .$$

Využijúc týchto vzťahov môžeme χ vyjadriť v tvare

$$\chi = \frac{\frac{i}{2} R + R}{\frac{i}{2} R} = \frac{i+2}{i}$$

Pre najčastejší prípad dvojatómových molekúl, ktoré majú 5 stupňov voľnosti plynie z tohoto vzťahu hodnota $\chi = 1{,}4$.

Popis zariadenia a metóda merania:



Meranie Poissonovej konštanty robíme na Clément-Desormesovom prístroji. Zariadenie je veľmi jednoduché, viď obrázok. Pozostáva zo sklenenej nádoby N, kohútov K_1, K_2, prívodov k hustilke a vodnému U-manometru. Prostredníctvom kohúta K_2 možno nádobu spojiť s vonkajším vzduchom. Vzťah medzi stavovými veličinami vzduchu (budeme určovať Poissonovu konštantu vzduchu) vyšetríme pri troch rôznych stavoch vzduchu v nádobe N.

Prvý stav (S_1) po nahustení vzduchu hustilkou cez K_1 a ustálení hladín mernej kvapaliny v ramenách U-manometra je charakterizovaný stavovými veličina $p_1 = b + \rho g h_1$, V_1, T_1 , n_1, kde n_1 je počet molov v nádobe, b je barometerický tlak, h_1 je rozdiel hladín kvapaliny v U-manometri.

Druhý stav (S_2) sa zaznamenáva v tom okamihu, keď sa krátkodobým otvorením kohúta K_2 spojí nádoba s vonkajším vzduchom (adiabatický dej). V tomto prípade sú stavové veličiny b, V, T_2, n_2, kde n_2 je počet molov, ktoré zostali po expanzii v nádobe.

Tretí stav (S_3) po opätovnom ustálení hladín kvapaliny v ramenách U-manometra je charakterizovaný stavovými veličinami $p_2 = b + \rho g h_2$, V_2, T_1, n_2, kde h_2 je opäť rozdiel hladín kvapaliny v ramenách U-manometra.

Pre jednotlivé tieto stavy platia nasledovné rovnice:

Po nahustení vzduchu do nádoby

$$p_1 V_1 = n_1 R T_1 \tag{1}$$

Po krátkodobom spojení nádoby s okolím

$$bV = n_2RT_2 \ . \tag{2}$$

Pre výsledný stav po ustálení hladín

$$p_2V_2 = n_2RT_1 . \tag{3}$$

Pretože otvorením nádoby časť nahusteného vzduchu unikla do okolia, počet molov n_1 sa nerovná počtu molov n_2 ($n_2 < n_1$). Celkovú zmenu stavu plynu z pôvodného (S_1) na konečný (S_3) môžeme chápať ako izotermickú a pri zohľadnení, že $n_1 \neq n_2$ napísať pre ňu na základe rovníc (1), (2), (3) Boyleov-Mariotteov zákon v tvare

$$p_1v_1 = p_2v_2 \tag{4}$$

kde $v_1 = V_1 / n_1$, $v_2 = V_2 / n_2$ sú merné (molové) objemy vzduchu v nádobe v stave (S_1) a (S_3). Prechod zo stavu (S_1) do stavu (S_2) považujeme za adiabatickú zmenu a môžeme pre ňu napísať Poissonovu rovnicu

$$p_1v_1^{\chi} = bv^{\chi} \doteq bv_2^{\chi} \tag{5}$$

pričom považujeme merné objemy plynu v stave (S_2) a (S_3) za približne rovnaké. Zo vzťahov (4) a (5) po úprave dostaneme

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\chi} = \frac{p_1}{b}$$

alebo po dosadení za $p_1 = b + \rho g h_1$ a $p_2 = b + \rho g h_2$ dostávame vzťah

$$\left(\frac{b + \rho g h_1}{b + \rho g h_2}\right)^{\chi} = \frac{b + \rho g h_1}{b},$$

z ktorého pre χ platí

$$\chi = \frac{ln\left(1 + \frac{\rho g h_1}{b}\right)}{ln\frac{1 + \frac{\rho g h_1}{b}}{1 + \frac{\rho g h_2}{b}}} \tag{6}$$

Ak platí $\rho g h_1 / b << 1$, $\rho g h_2 / b << 1$ potom vzťah (6) možno zjednodušiť rozvojom logaritmických funkcií do radov a uvažovať iba prvé členy týchto radov, teda

$$\chi = \frac{\frac{\rho g h_1}{b}}{\frac{\rho g h_1}{b} - \frac{\rho g h_2}{b}}$$

z čoho pre χ dostávame približný vzťah

$$\chi = \frac{h_1}{h_1 - h_2} . \tag{7}$$

Úlohy:

1. Zmerajte Poissonovu konštantu χ pre vzduch.
2. Stanovte chybu merania Poissonovej konštanty.
3. Určte relatívnu odchylku nameranej konštanty od tabuľkovej hodnoty.

Postup merania:

1. Na začiatku a na konci merania odčítame barometrický tlak a vypočítame jeho priemernú hodnotu.
2. Do nádoby N gumenou hustilkou natlačíme cez kohút K_1 vzduch tak, aby manometer ukázal pretlak. Počkáme, až sa hladiny vodného stĺpca v ramenách manometra ustália a odčítame pretlak h_1.
3. Otvoríme kohút K_2 a hneď uzavrieme. Chvíľu opäť počkáme až sa hladiny v ramenách manometra ustália a odčítame pretlak h_2.
4. Meranie opakujeme 10-krát (20-krát) pri rôznych začiatočných pretlakoch h_1 a pri rôznych rýchlostiach otvorenia kohúta K_2. Odčítané hodnoty h_1 a h_2 zapisujeme do tabuľky I.

Tabuľka I.

č.m.	h_1 [mm]	h_2[mm]	$p_1=b+\rho g h_1$ [kPa]	$p_2=b+\rho g h_2$ [kPa]	χ`	χ``

Spracovanie merania:

1. Hodnotu χ vypočítanú podľa presného vzťahu (6) zapíšeme do tabuľky I. s označením χ` a hodnotu χ vypočítanú podľa približného vzťahu (7) zapíšeme do tabuľky I. s označením χ``.
2. Vypočítame stredné hodnoty $\overline{\chi}'$ a $\overline{\chi}''$ ich príslušné kvadratické odchylky a relatívnu odchylku od tabuľkovej hodnoty. Výsledky zapíšeme do tabuľky II.

Tabuľka II.

	$(\delta\overline{\chi})$	δ_r [%]
$\overline{\chi}'$		
$\overline{\chi}''$		

Poznámka:

1. Tlak b odčítaný na stupnici barometra v jednotkách torr (mm Hg) vyjadríme v sústave SI použitím vzťahu
   $1\,\text{torr}\,(\text{mmHg}) = 133{,}3\,\text{Pa}$.
2. V manometri je voda o hustote $\rho = 1000\ \text{kgm}^{-3}$.
3. Tabuľková hodnota Poissonovej konštanty pre vzduch (bez CO_2 a vodných pár) je $\chi = 1{,}405$.

Kontrolné otázky:

1. Čo hovorí prvá veta termodynamická a čo z nej vyplýva pre adiabatický dej?
2. Zapíšte stavovú rovnicu plynu pre obecné množstvo plynu.
3. Uveďte definičný vzťah pre Poissonovu konštantu. Aký má rozmer a jednotku?
4. Objasnite pojem stupeň voľnosti molekuly (telesa).

Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. *„Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky“*, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.